

## Premier problème : Thermodynamique

### Première partie Étude d'un réservoir à gaz

1.1. Pour les gaz diatomiques :  $\gamma = \frac{7}{5}$

1.1.1. Exemples de gaz diatomiques :  $H_2$  ,  $O_2$  ,  $N_2$  ,  $Cl_2$  ...

1.1.2.

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

Application numérique :  $c_v = 20 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  et  $c_p = 29 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

1.2. Le piston II est bloqué

1.2.1.

$$P_o V_1 = N_1 R T_o \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{P_o V_1}{R T_o} = 0,4 \text{ mol}$$

1.2.2.

$$P_1 = P_R = 25.10^5 \text{ Pa}$$

1.2.3. Conservation de la quantité de matière :

$$n_t = N_1 + N \quad \text{avec} \quad P_R V_1 = n_t R T_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_R V_1}{R T_1} = N + \frac{P_o V_1}{R T_o}$$

$$\text{Soit :} \quad N = \frac{V_1}{R} \left( \frac{P_R}{T_1} + \frac{P_o}{T_o} \right)$$

1.2.4. Variation de l'énergie interne  $\Delta U$  :

$$\Delta U = (N_1 + N) c_v (T_1 - T_o) = (N_1 + N) R \frac{T_1 - T_o}{\gamma - 1}$$

1.2.5. Travail  $W$  reçu par le système :

- État (1) : ouverture de la vanne, le volume accessible pour les  $N$  moles du gaz  $G$  est :  $V_N + V_1 = V_i$ .
- État (2) : le gaz  $G$  renferme le volume  $V_1 = V_f$ .

$$\text{Le travail :} \quad W = -P_R (V_f - V_i) \Rightarrow W = P_R V_N$$

**1.2.6.** Le cylindre est isolé thermiquement et le piston est athermane  $\Rightarrow$  la transformation de  $G$  est adiabatique.

1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique :  $\Delta U = Q + W = W$  or  $W = P_R V_N = NRT_o$

$$\Rightarrow (N_1 + N) R \frac{T_1 - T_o}{\gamma - 1} = NRT_o \Rightarrow \frac{P_R V_1 T_1 - T_o}{T_1} \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{V_1}{R} \left( \frac{P_R}{T_1} + \frac{P_o}{T_o} \right) RT$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{\gamma T_o P_R}{P_R + (\gamma - 1) P_o} = 413,38 K}$$

**1.3.** Le piston  $\Pi$  étant toujours bloqué

**1.3.1.** La transformation est une détente adiabatique .

**1.3.2.**

$$\Delta U = \underbrace{W}_{=0} + \underbrace{Q_1 + Q_2}_{=0} = 0 = n_t c_v (T_2 - T_1) \Rightarrow \boxed{T_1 = T_2}$$

**1.3.3.** La transformation est irréversible. . Au cours d'une transformation élémentaire réversible :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = C_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV = C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

C'est une détente isotherme, donc :

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nR \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}$$

$$\text{Or } P_R V_1 = nRT_2 = nRT_1 \Rightarrow \boxed{\Delta S = \frac{P_R}{T_1} V_1 \ln \left( 1 + \frac{V_2}{V_1} \right)}$$

**1.3.4.** Application numérique :  $\Delta S \simeq 11 J.K^{-1}$

**1.3.5.** L'état final du système est indépendant de l'ordre d'ouverture et de fermeture des vannes  $V_1$  et  $V_{12}$  car  $P_R$  est indépendante de  $N$  (gaz éjecté) et que la température  $T_1$  ne dépend que de  $P_R$ .

**1.4.** Le piston  $\Pi$  étant toujours bloqué

**1.4.1.** Quantité de matière du gaz  $G_o$

$$P V_2^i = n_2 R T = \frac{P_R}{x} V_2^i \Rightarrow \boxed{n_2 = \frac{P_R V_o}{R T_o}}$$

**1.4.2.** Volume  $V_2$  occupé par le gaz de  $C_2$  .

Soit  $P'$  la pression du gaz de  $C_2$ .

$$P' V_2 = n_2 R T = \frac{P_R V_o}{R T_o} R T = \frac{P_R V_o}{T_o} T$$

$$\text{A l'équilibre } P_R = P' \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{V_o}{T_o} T}$$

**1.4.3.** Température de gaz  $G_o$  contenu dans  $C_2$

1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique :  $\Delta U = n_2 c_{vo}(T - T_o) = W$

$$W = -P_R \Delta V = -P_R(V_f - V_i) = -P_R(V_2 - V_2^i) = -P_R \left( \frac{V_o}{T_o} T - xV \right)$$

$$\Delta U = n_2 c_{vo}(T - T_o) = \frac{P_R V_o}{R T_o} c_{vo}(T - T_o) = 3 \frac{P_R V_o}{T_o} (T - T_o)$$

$$\text{Soit : } x - \frac{T}{T_o} = 3 \left( \frac{T}{T_o} - 1 \right) \Rightarrow \boxed{T = \frac{T_o}{4}(x + 3)}$$

**1.4.4.** Expression de  $V_2$ ; d'après 1.4.2.

$$V_2 = \frac{V_o}{T_o} T = \boxed{\frac{V_o}{4}(3 + x)}$$

**1.4.5.** Variation d'entropie du gaz  $G_o$  contenu dans  $C_2$  Pour une transformation élémentaire réversible :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = c_{vo} \frac{dT}{T} + p \frac{dV}{T} = c_{vo} \frac{dT}{T} + n_2 R \frac{dV}{V} = 3R \frac{dT}{T} + \frac{P_R V_o}{T_o} \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \Delta S = 3R \ln \frac{T}{T_o} + \frac{P_R V_o}{T_o} \ln \frac{V_2}{V_2^i} \Rightarrow \boxed{\Delta S = 3R \ln \frac{3+x}{4} + \frac{P_R V_o}{T_o} \ln \frac{3+x}{4x}}$$

**1.4.6.** Applications numériques

**1.4.6.1.**

$$\underline{T = 2100K} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S(x = 25) = 3,8 J.K^{-1}}$$

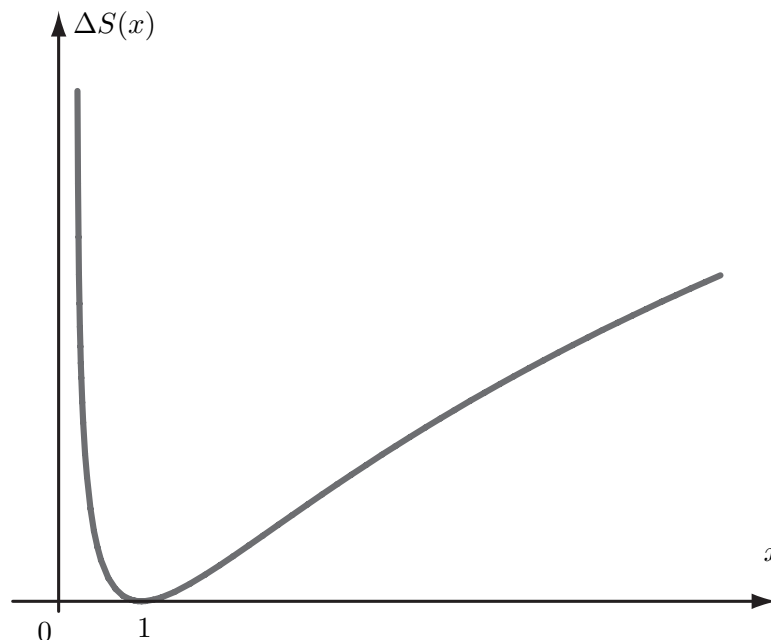
**1.4.6.2.**

$$\Delta S(x = 1) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S(x = 0) \rightarrow \infty$$

**1.4.6.3.**

$$\boxed{x_{max} = 120}$$

**1.4.7.** Graphe de  $\Delta S(x)$



## Deuxième partie

### Étude d'un moteur à piston

**2.1. Première étape :** le piston est placé contre la culasse  $K$ , et la soupape  $S_1$  est fermée, et on ouvre  $S_2$

**2.1.1.** La pression à l'intérieur du cylindre est  $P_A = P_R$  et la transformation est une détente monobare.

**2.1.2.** Quantité de matière  $n_o$  admise dans le cylindre

$$\text{On a : } P_R V = n_o R T_1 = P_R \frac{V_A}{\alpha} \Rightarrow \boxed{n_o = \frac{P_R V_A}{\alpha R T_1}}$$

**2.1.3.** Expression de  $T_1$  en fonction de  $T_o$   
1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique :

$$\Delta U = W \text{ avec } \Delta U = \frac{n_o R}{\gamma - 1} (T_1 - T_o) \text{ et } W = -P_R (V_f - V_i)$$

$$\text{Or : } \begin{cases} V_i = V_N \\ V_f = V_N + V \end{cases} \Rightarrow W = -P_R V = -P_R \frac{V_A}{\alpha}$$

$$\text{Soit : } \frac{P_R V_A}{\alpha T_1} \frac{T_1 - T_o}{\gamma - 1} = -P_R \frac{V_A}{\alpha} \Rightarrow T_1 - T_o = -T_1 (\gamma - 1) \text{ ou } \boxed{T_1 = \frac{T_o}{\gamma}}$$

**2.1.4. Application numérique :**  $n_o = 0,16 \text{ mol}$

**2.2. Deuxième étape :** la soupape  $S_1$  est fermée et  $S_2$  se ferme, le gaz subit une détente adiabatique réversible

**2.2.1.** Expression de la pression  $P_2$  dans le cylindre  
Une des lois de Laplace donne :

$$P_2 V_A^\gamma = P_R \left(\frac{V_A}{\alpha}\right)^\gamma \Rightarrow \boxed{P_2 = \frac{P_R}{\alpha^\gamma}}$$

Application numérique :  $P_2 = 2,6.10^5 \text{ Pa}$

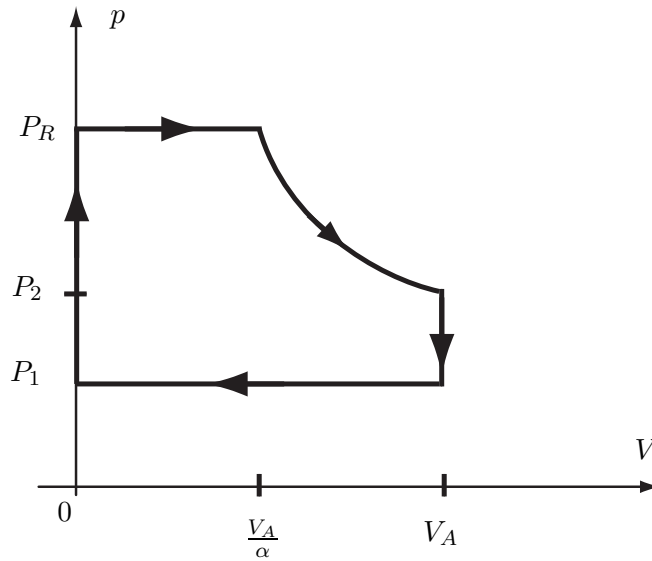
**2.2.2.** Travail  $W_2$  reçu par le gaz

$$W_2 = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1} = \frac{P_2 V_2 - P_R \frac{V_A}{\alpha}}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_2 = \frac{P_R V_A}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{\alpha^\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

**2.3.** Troisième étape : la soupape  $S_2$  s'ouvre

2.3.1. Diagramme de watt



2.3.2. Travail  $W_o$  fourni au gaz par le piston au cours d'un cycle

$$W_o = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DE} \text{ tels que } \begin{cases} W_{AB} = -P_R \frac{V_A}{\alpha} \\ W_{BC} = W_2 \\ W_{CD} = 0 \\ W_{DE} = +P_o V_A \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \boxed{W_o = \frac{P_R V_A}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{\alpha^\gamma} - \frac{1}{\alpha} \right) + V_A \left( P_o - \frac{P_R}{\alpha} \right)}$$

Application numérique :  $W_o \simeq -794 \text{ J}$

2.3.3. Débit massique  $D_1$  en régime stationnaire

$$\text{On a : } \mathcal{P} = \frac{W_o}{\Delta t} \text{ et } D_1 = \frac{m_o}{\Delta t} = \frac{n_o M}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{D_1 = n_o M \frac{\mathcal{P}}{W_o} = \frac{\gamma M P_R V_A \mathcal{P}}{\alpha R T_o W_o}}$$

Application numérique :  $D_1 \simeq 28,56 \text{ kg h}^{-1}$

2.3.3.1. Durée d'un cycle  $\Delta t = 0,8 \text{ s}$

## Troisième partie Étude d'un moteur à turbine

3.1. Détente adiabatique réversible

3.1.1. 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique pour un système ouvert (S)

$$d\mathcal{E}(t) + dt(D_{me} e_{\text{sortie}} - D_{ms} e_{\text{entrée}}) = \delta Q + \delta W$$

Avec :

- $\mathcal{E}(t)$  : Énergie, totale, du système (S) à l'instant t.
- $e_{\text{sortie}}$  : Énergie massique, totale, à la sortie de (S).

- $e_{\text{entrée}}$  : Énergie massique, totale, à l'entrée de ( $S$ ).
- $D_m$  : Le débit massique.
- $\delta W$  et  $\delta Q$  : les transferts d'énergie (travail et énergie thermique respectives) reçus par le système fermé ( $\Sigma$ ) constitué à l'instant  $t$  du contenu matériel de ( $S$ ) et de la masse entrée dans ( $S$ ) pendant  $dt$ .

**3.1.2.** Le bilan énergétique précédent pourra s'écrire sous la forme :

$$d\mathcal{E}(t) + dt [D_m(e_c + e_{p,\text{ext}} + h)]_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} = \delta Q + \delta W_T$$

- ◇  $e_c$  : énergie cinétique massique.
- ◇  $e_{p,\text{ext}}$  : énergie potentielle extérieur massique.
- ◇  $h$  : l'enthalpie massique.

Dans le cas du modèle du moteur à turbine étudié, on a les résultats suivants :

- ◇ pas de variation de l'énergie potentielle extérieur massique.
- ◇ Pas de variation de l'énergie cinétique massique (vitesses négligeables).
- ◇ Le régime est stationnaire  $\implies D_m = \text{constant}$  et  $d\mathcal{E}(t) = 0$
- ◇  $Q = 0$  pas d'échange de l'énergie thermique avec l'extérieur.

Soit  $m$  la masse transférée pendant  $dt$ , d'où :

$$m [h]_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} = W_T = m (h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}}) \implies \boxed{W_T = n(h_{\text{sortie}}^m - h_{\text{entrée}}^m)}$$

Où  $h^m$  désigne l'enthalpie molaire et la quantité de matière  $n = 1 \text{ mol}$

**3.1.3.**

$$W_T = \Delta h^m = C_{pm} (T_1 - T_o) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \\ T_1 P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_o P_R^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{cases}$$

$$\implies \boxed{W_T = \frac{\gamma R T_o}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{P_o}{P_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}$$

Application numérique :  $W_T \simeq -5,2 \text{ Jmol}^{-1}$

**3.1.4.** Débit massique  $D_2$

$$\boxed{D_2 = M \frac{\mathcal{P}}{W_T}}$$

Application numérique :  $D_2 \simeq 19 \text{ kgh}^{-1}$

**3.2.** Détente polytropique

**3.2.1.**

$$\boxed{W_T' = \frac{k R T_o}{k - 1} \left( \left( \frac{P_o}{P_R} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}$$

Application numérique :  $W_T' = -3,1 \text{ Jmol}^{-1}$

**3.2.2.**

$$\boxed{D_2' = M \frac{\mathcal{P}}{W_T'}}$$

Application numérique :  $D_2' \simeq 32 \text{ kgh}^{-1}$

## Quatrième partie Étude d'un moteur à réaction

4.1. Le 1<sup>er</sup> principe  $\implies \Delta(e_c + h^m) = 0$

$$\implies \frac{1}{2} M v^2 + \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_1 - T_o) = 0 \implies v = \sqrt{\frac{2\gamma R T_o}{M(\gamma - 1)} \left( \left( \frac{P_o}{P_R} \right)^{\frac{k'-1}{k'}} - 1 \right)}$$

Application numérique :  $v \simeq 269 \text{ m s}^{-1}$

4.2. Débit massique  $D_3$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} v^2 D_3 \implies D_3 = 2 \frac{\mathcal{P}}{v^2}$$

Application numérique :  $D_3 \simeq 99,5 \text{ kg h}^{-1}$

### Deuxième problème : Mécanique

#### Première partie Mise en équation

1.1.

$$\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = l \cos \theta \vec{u}_x + (y_A + l \sin \theta) \vec{u}_y = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$$

1.1.1.

$$x = l \cos \theta$$

1.1.2.

$$y = y_A + l \sin \theta \implies y_A = y - l \sin \theta$$

1.1.3. Bilan des forces exercées sur la barre :

- Poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = m g \vec{u}_x$$

- Réaction de l'axe sur la barre ( Absence de frottements  $\implies \vec{R} \cdot \vec{u}_y = 0$ ) :

$$\vec{R} = -R \vec{u}_x ; (R > 0)$$

- L'action du ressort :

$$\vec{f} = -k y_A \vec{u}_y$$

1.1.4. Théorème de la résultante cinétique (TRC) (On note  $\mathcal{R}$  le référentiel de laboratoire d'étude) :

$$m \vec{a}_{G/\mathcal{R}} = m \left( \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{f} + m\vec{g} + \vec{R} = -k y_A \vec{u}_y + (m g - R) \vec{u}_x$$

**1.1.5.**

○ Accélération de la barre par rapport à  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{a}_{G/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{G/\mathcal{R}} = -l(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y}$$

○ Expression de la réaction  $\vec{R}$  : projection du (TRC) suivant  $\vec{u}_x$

$$R = mg + ml(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \Rightarrow \boxed{\vec{R} = -m(g + l(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta))\vec{u}_x}$$

○ Équation du mouvement : projection du (TRC) suivant  $\vec{u}_y$  et résultat de la question 1.1.2.

$$m\ddot{y} = -ky_A \Rightarrow \boxed{\ddot{y} + \omega_1^2(y - l \sin \theta) = 0}$$

**1.1.6.** Théorème du moment cinétique en  $G$  (TMC) :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_{G/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{M}_G(\vec{P}) + \vec{M}_G(\vec{f}) + \vec{M}_G(\vec{R})} \quad \text{tels que :} \quad \begin{cases} \vec{L}_{G/\mathcal{R}} = J\dot{\theta}\vec{u}_z \\ \vec{M}_G(\vec{f}) = k_A y l \cos \theta \vec{u}_z \\ \vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{0} \\ \vec{M}_G(\vec{R}) = -Rl \sin \theta \vec{u}_z \end{cases}$$

**1.1.7.** Par projection du (TMC) suivant  $\vec{u}_z$ , on obtient :

$$-Rl \sin \theta + kly_A \cos \theta = J\ddot{\theta} = m\frac{l^2}{2}\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = 3\omega_1^2 \frac{y_A}{l} \cos \theta - \omega_2^2 \sin \theta \left(1 + \frac{l}{g}(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)\right)}$$

**Deuxième partie**  
**Étude des petites oscillations de la barre**

**2.1.** Dans le cas des petits mouvements :

$$\sin \theta \approx \theta \text{ et } \cos \theta \approx 1 \Rightarrow y_A \approx y - l\theta$$

Les équations établies en 1.1.5. et 1.1.7. donnent :

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{y} + \omega_1^2(y - l\theta) = 0 \\ l\ddot{\theta} = 3\omega_1^2(y - l\theta) - \omega_2^2 l\theta \end{cases}$$

Soient, avec  $z = l\theta$ , :

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega_1^2 y = \omega_1^2 z \\ \ddot{z} + (3\omega_1^2 + \omega_2^2)z = 3\omega_1^2 y \end{cases}$$

**2.2.** En notation complexe :

$$\underline{y} = \underline{A} \exp i\Omega t \text{ et } \underline{z} = \underline{B} \exp i\Omega t$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{y}} = -\Omega^2 \underline{y} \text{ et } \underline{\ddot{z}} = -\Omega^2 \underline{z}$$



2.2.1. En remplaçant chaque expression dans les deux équations établies en 2.1., on aura :

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2) \underline{A} - \omega_1^2 \underline{B} = 0 \\ -3\omega_1^2 \underline{A} + (3\omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2) \underline{B} = 0 \end{cases}$$

2.2.2. Condition de solutions non nulles : déterminant du système nul et  $\omega_1 \neq \Omega$

2.2.3. déterminant du système nul, donne :  $\Omega^4 - (4\omega_1^2 + \omega_2^2) \Omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0$

2.2.4. Les solutions (physiques) de l'équation précédente, avec ( $\Omega_1 > \Omega_2$ ), sont :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \sqrt{\frac{4\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{16\omega_1^4 + \omega_2^2 + 4\omega_1^2 \omega_2^2} \\ \Omega_2 = \sqrt{\frac{4\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{16\omega_1^4 + \omega_2^2 + 4\omega_1^2 \omega_2^2} \end{cases}$$

Les constantes  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$ ,  $\underline{B}_1$  et  $\underline{B}_2$  seront déterminées connaissant les conditions initiales.

2.3. Conditions initiales :

$$y(t=0) = z(t=0) = l\theta_o \quad \text{et} \quad \ddot{y}(t=0) = \ddot{z}(t=0) = 0$$

2.3.1.

$$\underline{A}_1 = \underline{B}_1 = \frac{l\theta_o}{1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}}$$

et

$$\underline{A}_2 = \underline{B}_2 = \frac{l\theta_o}{1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}}$$

2.3.2.

$$\underline{y}(t) = \frac{l\theta_o}{1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}} \left( \exp i\Omega_1 t - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \exp i\Omega_2 t \right) \Rightarrow \underline{y}(t) = \frac{l\theta_o}{1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}} \left( \cos \Omega_1 t - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \cos \Omega_2 t \right)$$

2.3.3.

$$\underline{\theta}(t) = \frac{\underline{z}(t)}{l} = \frac{\theta_o}{1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}} \left( \exp i\Omega_1 t - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \exp i\Omega_2 t \right) \Rightarrow \underline{\theta}(t) = \frac{\theta_o}{1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}} \left( \cos \Omega_1 t - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \cos \Omega_2 t \right)$$

Les deux expressions mettent en évidence le phénomène du couplage mécanique.